**ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**

**Σχ. βιβλίου σελίδων 81 – 82**

**1.**

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

Κ = α3 (1 + α + 4 +  αν είναι α =  και β = 3

**Προτεινόμενη λύση**

Κ =  = =

= (2)2 + 4  + 1 =

= 4 + 4  + 1 =

= 4  + 1 = 

**2.**

Για κάθε θετικό ακέραιο ν , να αποδείξετε ότι

**α)** (αβ + 3γ) 2ν + 1 + ( βα3γ)2ν+1 = 0

**β)** (xy  ω) 2ν   ( y + ωx)2ν = 0

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Επειδή ν θετικός ακέραιος, ο εκθέτης 2ν + 1 είναι περιττός.

Οι βάσεις των δυνάμεων είναι αντίθετες, οπότε υψωμένες σε περιττή δύναμη δίνουν αντίθετες παραστάσεις, άρα το άθροισμά τους είναι 0.

**β)**

Επειδή ν θετικός ακέραιος, ο εκθέτης 2ν είναι άρτιος.

Οι βάσεις των δυνάμεων είναι αντίθετες, οπότε υψωμένες σε άρτια δύναμη δίνουν ίσες ες παραστάσεις, άρα η διαφορά τους είναι 0.

**3.**

Αν είναι  =  , να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων

Α =  Β = 

**Προτεινόμενη λύση**

Αφού  = θα είναι y = 2x

Α =  =  =  = 4

Β =  =  =

=  =  = 3

**4.**

Δίνεται το πολυώνυμο P(x) = 2x2 + 2x + 800

**α)** Να αποδείξετε ότι Ρ(1x) = Ρ(x)

**β)** Να βρείτε την αριθμητική τιμή Ρ(100) και Ρ(99)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Ρ(1x) = 2(1x)2 + 2(1x) + 800 = 2( 12x + x2) + 22x + 800 =

= 2 + 4x  2x2 + 22x + 800 =

= 2x2 + 2x + 800 = P(x)

**β)**

Ρ(100) = 2 (100)2 + 2∙100 + 800 = 20000 + 200 + 800 = 19000

Ρ(99) = Ρ(1 – 100)  Ρ(100) = 19000

**5.**

**α)** Να αποδείξετε ότι α3 + β3 + γ3 3αβγ = (α + β + γ)( α2 + β2 + γ2 – αβαγβγ)

( Ταυτότητα Euler)

**β)** αν α + β + γ = 0 να αποδείξετε ότι α3 + β3 + γ3 = 3αβγ

**γ)** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση (xy)3 + ( yω)3 + ( ωx)3

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

(α + β + γ)( α2 + β2 + γ2 – αβαγβγ) = α3 + αβ2 + αγ2 α2βα2γαβγ +

+ βα2 + β3 +βγ2αβ2αβγβ2γ +

+ γα2 +γβ2 + γ3 – αβγαγ2βγ2  =

= α3 + β3 + γ3 3αβγ

**β)**

Αν α + β + γ = 0, από το (α) θα είναι α3 + β3 + γ3 3αβγ = 0 άρα

α3 + β3 + γ3 = 3αβγ

**γ)**

Επειδή (xy) + ( yω) + ( ωx) = xy + yω + ωx = 0,

σύμφωνα με το (β) θα είναι (xy)3 + ( yω)3 + ( ωx)3 = 3(xy)( yω)( ωx)

**6.**

Αν α + β =  και αβ =  τότε να αποδείξετε ότι

**α)** α2 + β2 =  **β)** (3α + 1) 2 + ( 3β + 1)2 + 9( α + β) = 40

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Από γνωστή εφαρμογή (2) της σελίδας 45 είναι α2 + β2 = ( α + β)22αβ

Άρα α2 + β2 = 2 = +  = 

**β)**

(3α + 1)2 + ( 3β + 1)2 + 9( α + β) = 9α2 + 6α + 1 + 9β2 + 6β + 1 + 9α + 9β =

= 9(α2 + β2) + 15(α + β) + 2 =

 9∙ + 15+ 2 =

= 435 + 2 = 40

**7.**

Αν για τους αριθμούς x , y ισχύει μία από τις παρακάτω ισότητες, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x , y είναι ίσοι ή αντίθετοι.

**α)** x42y2 = x2(y22) **β)** x3 + y3 = x2y + y2x

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

x42y2 = x2(y22) άρα x42y2 = x2y22x2

x42y2  x2y2 + 2x2 = 0

x2(x2 + 2) y2(x2 + 2) = 0

(x2 + 2)(x2y2) = 0

(x2 + 2)(xy) (x + y) = 0

x2 + 2 = 0 ή xy = 0 ή x + y = 0

πράγμα αδύνατο ή x = y ή x = y

ίσοι ή αντίθετοι

**β)**

x3 + y3 = x2y + y2x άρα x3 + y3 x2y  y2x= 0

x2(xy) – y2(xy) = 0

(xy)(x2y2) = 0

(xy)( x –y) (x + y) = 0

(xy)2( x + y) = 0

xy = 0 ή x + y = 0

x = y ή x = y

ίσοι ή αντίθετοι

**8.**

**α)** Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα x2 + 4x + 3 , x2 + 2x 3

**β)** Να υπολογίσετε την παράσταση Α =  + + 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

x2 + 4x + 3 = (x +1)(x + 3) , x2 + 2x 3 = (x + 3)(x1)

**β)**

Α =  + +  =

=  +  +  =

= + + =

=  =

= =  = 

**9.**

Δίνονται οι παραστάσεις Α = x(x + 3) και Β = ( x + 1)( x + 2)

**α)** Να αποδείξετε ότι Β = Α + 2 και ΑΒ + 1 = (Α + 1)2

**β)** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση x( x + 1)(x + 2)( x +3) + 1

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Β = (x + 1)( x + 2) = x2 + 2x + x + 2 = x2 + 3x + 2 =

= x(x + 3) + 2 =

= A + 2 **(1)**

ΑΒ + 1  A (A + 2) + 1 = A2 + 2A + 1 = (A + 1)2 **(2)**

**β)**

x( x + 1)(x + 2)( x +3) + 1 = ΑΒ + 1  (A + 1)2 =

= [x(x + 3) +1]2 =

= (x2 + 3x +1)2

**10.**

**α)** Το εμβαδόν ενός κύκλου είναι 16πx4 + 8πx2 + π. Να βρείτε την ακτίνα του.

**β)** Να βρείτε την ακτίνα ενός κύκλου που έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των

εμβαδών δύο κύκλων με ακτίνες 4x και 4x21

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Το εμβαδόν κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο Ε = πρ2

Η υπόθεση γράφεται 16πx4 + 8πx2 + π = π(16x4 + 8x2 + 1) = π(4x2 + 1)2

Επομένως η ακτίνα του κύκλου είναι ρ = 4x2 + 1

**β)**

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο κύκλων είναι ίσο με

π(4x)2 + π(4x21)2 = 16πx2 + 16πx4 8πx2 + π = 16πx4 + 8πx2 + π

Και με βάση το (α) η ζητούμενη ακτίνα είναι ρ = 4x2 + 1

**11.**

**α)** Αν ο αριθμός κ είναι ακέραιος, να δείξτε ότι ο αριθμός κ2 + κ είναι άρτιος.

**β)** Να αποδείξετε ότι η διαφορά των κύβων δύο διαδοχικών ακεραίων αν διαιρεθεί

με το 6 δίνει υπόλοιπο 1.

**γ)** Να αποδείξετε ότι η διαφορά τετραγώνων δύο περιττών ακεραίων είναι

πολλαπλάσιο του 8.

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

κ2 + κ = κ(κ +1) = γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων. Οπότε ο ένας από αυτούς είναι άρτιος, άρα ο κ2 + κ είναι άρτιος

**β)**

Έστω κ , κ + 1 δύο διαδοχικοί ακέραιοι.

Τότε (κ +1)3 κ3 = (κ +1κ)[κ2 + κ(κ + 1) + (κ + 1)2] =

= 3κ2 + 3κ +1 =

= 3(κ2 + κ) +1  3∙2ν + 1 = 6ν + 1

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του (κ +1)3 κ3 με το 6 είναι 1 και το πηλίκο

ν (θέσαμε κ2 + κ = 2ν = άρτιος)

**γ)**

Έστω μ = 2ρ+1 και η = 2λ + 1 δύο περιττοί ακέραιοι

Τότε μ2 η2 = (2ρ + 1)2 (2λ+1)2 = 4ρ2 + 4ρ + 1 4λ24λ1 =

= 4(ρ2 + ρ)  4(λ2+λ) 

= 4∙2σ 4∙2π = 8(σπ) = πολλαπλάσιο του 8

**12.**

**α)** Να κάνετε τη διαίρεση (x61) : ( x1) και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

της Ευκλείδειας διαίρεσης να αποδείξετε ότι ο αριθμός 761 είναι πολλαπλάσιο

του 6.

**β)** Να κάνετε την διαίρεση (x5 + 1) : ( x + 1) και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

της Ευκλείδειας διαίρεσης να αποδείξετε ότι ο αριθμός 215 + 1 είναι

πολλαπλάσιο του 9

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

|  |  |
| --- | --- |
| x6 1  x6 + x5 | x1 |
| x5 1  x5 + x4 | x5 + x4 + x3 + x2 + x + 1 |
| x4 1  x4+ x3 |  |
| x3 1  x3 + x2 |
| x2 1  x2 + x |
| x 1  x + 1 |
| 0 |

Η ταυτότητα της διαίρεσης δίνει x61 = (x1)( x5 + x4 + x3 + x2 + x + 1)

Για x = 7, έχουμε 761 = (71)( 75 + 74 + 73 + 72 + 7 + 1)

761 = 6 ( 75 + 74 + 73 + 72 + 7 + 1)

Και αν θέσουμε 75 + 74 + 73 + 72 + 7 + 1 = κ ακέραιο, έχουμε

761 = 6κ = πολλαπλάσιο του 6

**β)**

|  |  |
| --- | --- |
| x5 +1  x5  x4 | x + 1 |
| x4 +1  x4 + x3 | x4  x3 + x2 x + 1 |
| x3 +1  x3 x2 |  |
| x2 +1  x2 + x |
| x +1  x  1 |
| 0 |

Η ταυτότητα της διαίρεσης δίνει x5 + 1 = (x + 1)( x4  x3 + x2 x + 1)

Για x = 23 έχουμε 215 + 1 = (23 + 1)( 212  29 + 26 23 + 1) =

= 9(212  29 + 26 23 + 1) =

= 9μ όπου μ = 21229 + 26 23 + 1 ακέραιος

Τελικά έχουμε ότι 215 + 1 = 9μ = πολλαπλάσιο του 9

**13.**

**α)** Να αποδείξετε ότι  = 

**β)** Στην προηγούμενη ισότητα να αντικαταστήσετε το x διαδοχικά με τις τιμές

2 , 3, 4 ,…2008 και να αποδείξετε ότι

 +  + + …+  = 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

 = =  =  =  **(1)**

**β)**

Για x = 2 η (1) δίνει  = 

x = 3  = 

x = 4  = 

……………………………………..

…………………………………….

x = 2008  = 

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες και παρατηρώντας ότι ο δεύτερος προσθετέος του 2ου μέλους κάθε σειράς διαγράφεται με τον πρώτο προσθετέο του 2ου μέλους της επόμενης σειράς, βρίσκουμε ότι